Liceo scientifico "L. da Vinci" - Pescara

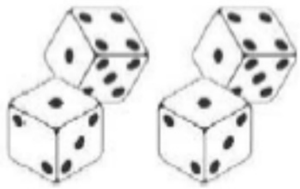
SIMULAZIONE DI FENOMENI ALEATORI

Nel 1967 Bruno de Finetti aveva osservato:

> Vi sono molte occasioni in cui molti ragionano male perché non conoscono i concetti probabilistici e statistici. Ma spesso accade anche che, in queste stesse occasioni, molti altri ragionino male perché hanno appreso dei concetti probabilistici e statistici comprendendoli male o comunque fraintendendoli quanto basta per applicarli male. In questa tendenza ad errare ad ogni costo si può certamente ravvisare [...] un effetto dell'avversione all'incertezza: o uno non applica i concetti che esprimono l'incertezza, oppure li applica forzandone l'interpretazione in modo da trasformare previsioni incerte in predizioni certe o da ricavarne grazie ai più strani fraintendimenti conclusioni gratuite o distorte.

Gioco 1 - Lancio di 4 dadi

Giovanni e Francesco giocano con 4 dadi. Giovanni guadagna 1 € se esce almeno un 6 lanciando i quattro dadi; in caso contrario, Francesco vince 1 €.



I passi dell'algoritmo relativi alla simulazione del Gioco 1 sono:

Passo 0 Assegnazione: n (numero di simulazioni che si intendono effettuare).

Passo 1 Inizializzazione: $cf = 0$ (contatore per il numero dei casi favorevoli).

Passo 2 Ciclo (simulazione lancio dei 4 dadi)

- creazione di quattro variabili a, b, c, d per censire i risultati ottenuti dai 4 dadi lanciati;
- Azione di controllo: se($a = 6$ o $b = 6$ o $c = 6$ o $d = 6$)allora esegui
  - Incremento del contatore cf .

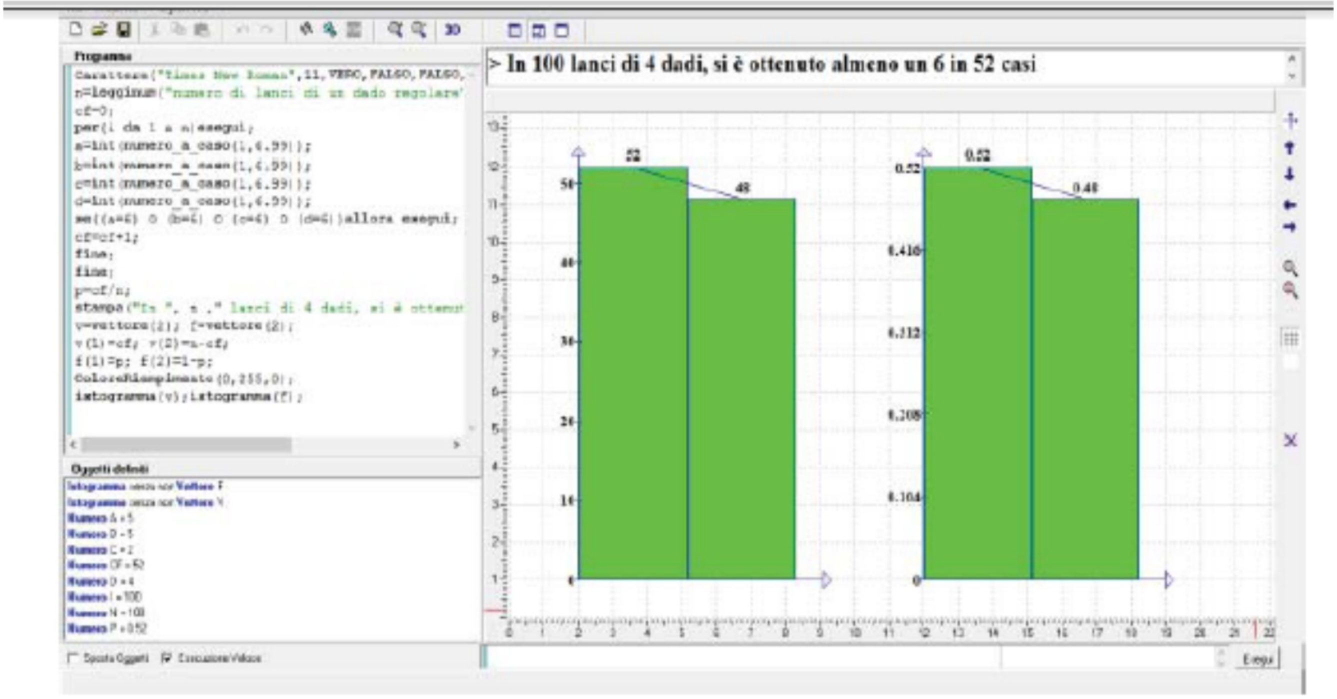
Passo 3 Calcola: $p = \frac{cf}{n}$.

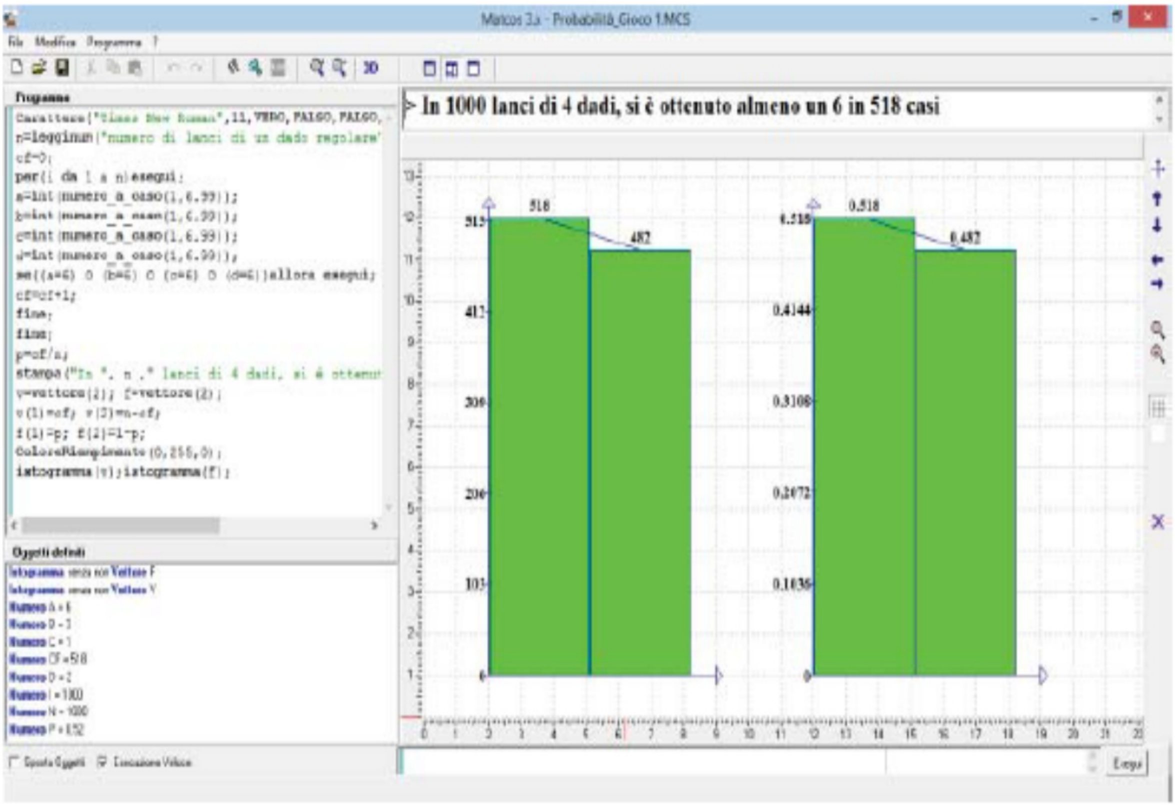
Passo 4 Azione di stampa: cf .

Passo 5 Azione di rappresentazione grafica: istogrammi delle frequenze assolute e relative

Codice MCS1 - Gioco 1

```
n=legginum("numero di simulazioni");
cf=0;
   per(i da 1 a n)esegui;
   a=int(numero_a_caso(1,6.99)); b=int(numero_a_caso(1,6.99));
   c=int(numero_a_caso(1,6.99)); d=int(numero_a_caso(1,6.99));
    se((a=6) O (b=6) O (c=6) O (d=6))allora esegui;
    cf=cf+1;
    fine;
   fine;
p=cf/n;
stampa("In",n," lanci di 4 dadi, si è ottenuto almeno un 6 in
",cf,"casi");
v=vettore(2);
f=vettore(2);
v(1)=cf;
v(2)=n-cf;
f(1)=p;
f(2)=1-p;
ColoreRiempimento(0,255,0);
istogramma(v);
istogramma(f);
```


Programma
Carattere("Times New Roman",11,VERO,FALSO,FALSO,
n=legginum("numero di lanci di un dado regolare"
cf=0;
per(i da 1 a n)esegui;
a=int(numero_a_caso(1,6.99));
b=int(numero_a_caso(1,6.99));
c=int(numero_a_caso(1,6.99));
d=int(numero_a_caso(1,6.99));
se((a=6) O (b=6) O (c=6) O (d=6))allora esegui;
cf=cf+1;
fine;
fine;
p=cf/n;
stampa("In ", n ," lanci di 4 dadi, si è ottenut
v=vettore(2); f=vettore(2);
v(1)=cf; v(2)=n-cf;
f(1)=p; f(2)=1-p;
ColoreRiempimento(0,255,0);
istogramma(v);istogramma(f);
Oggetti definiti
Numero CF = 52
Numero N = 100
Numero P = 0.52
> In 100 lanci di 4 dadi, si è ottenuto almeno un 6 in 52 casi
52
48
0.52
0.48
Esegui



Matcos 3.a - Probabilità_Gioco 1.MCS
Programma
> In 1000 lanci di 4 dadi, si è ottenuto almeno un 6 in 518 casi
518
482
0.518
0.482
Oggetti definiti
Esegui

Gli studenti, dopo aver simulato virtualmente il gioco per un numero di lanci sempre più alto, verificano che la probabilità di vittoria di Giovanni è maggiore di quella che ha Francesco.

Confronto con il modello teorico

considerato l'evento:

A= "Ottenere almeno un 6 lanciando 4 dadi"

l'evento complementare è:

A^C = "Ottenere nessun 6 lanciando 4 dadi"

La probabilità dell'evento A^C è data da:

$$p(A^C) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4823$$

quindi, la probabilità contraria è data da:

$$p(A) = 1 - p(A^C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177$$

Gioco 2 - Lancio di 2 dadi

Giovanni e Francesco giocano con 2 dadi che vengono lanciati per 24 volte. Giovanni guadagna 1€ se ottiene almeno un doppio 6; in caso contrario Francesco vince 1€.

Chi vince? Tenendo conto dei risultati precedenti..... Giovanni?

Procediamo....

I passi dell'algoritmo relativi alla simulazione del Gioco 2 sono:

Passo 0 Assegnazione: n (numero di simulazioni che si intendono effettuare); v (vettore per registrare i risultati ottenuti).

Passo 1 Ciclo (simulazione lancio di una coppia dadi 24 volte)

- inizializzazione: $cf = 0$ (contatore del numero dei casi favorevoli);
- Ciclo (simulazione lancio di una coppia di dadi)
  - creazione di due variabili a e b per censire i risultati ottenuti dalla coppia di dadi lanciati;
  - calcolo della somma s tra a e b.

Passo 2 Azione di controllo: se ($s = 12$) allora esegui

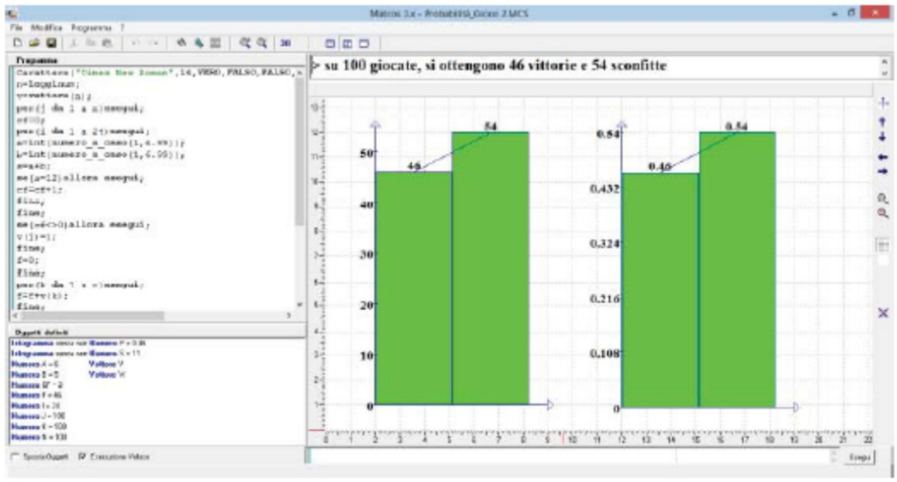
- Incremento del contatore cf ;
- Azione di controllo: se ($cf \neq 0$) allora esegui
  - riempimento del vettore v .

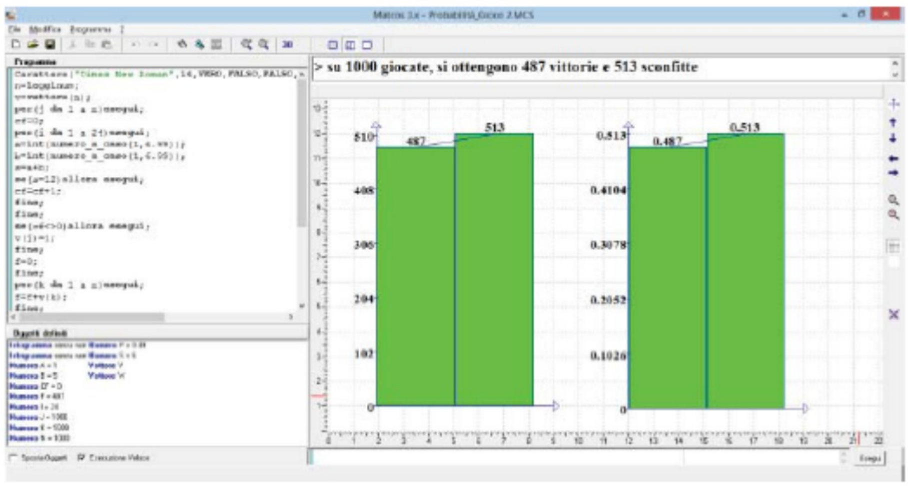
Passo 3 Calcolo delle frequenze assolute f come somma delle componenti del vettore v

Passo 4 Azione di stampa: f, $n - f$;

Codice MCS2 - Gioco 2

```
n=legginum;
v=vettore(n);
per(j da 1 a n)esegui;
   cf=0;
   per(i da 1 a 24)esegui;
    a=int(numero_a_caso(1,6.99));
    b=int(numero_a_caso(1,6.99));
    s=a+b;
    se(s=12)allora esegui;
    cf=cf+1;
    fine;
   fine;
    se(cf<>0)allora esegui;
    v(j)=1;
   fine;
    f=0;
fine;
per(k da 1 a n)esegui;
   f=f+v(k);
fine;
w=vettore(2);
w(1)=f;
w(2)=n-f;
ColoreRiempimento(0,255,0);
istogramma(w);
stampa("su",n,"giocate,si   ottengono",w(1),"vittorie   e   ",w(2),
"sconfitte");
```


> su 100 giocate, si ottengono 46 vittorie e 54 sconfitte
46
54
0.46
0.54


> su 1000 giocate, si ottengono 487 vittorie e 513 sconfitte
487
513
0.487
0.513

L'*output* della simulazione virtuale restituisce risultati discordanti con le previsioni effettuate che sancivano la vittoria di Giovanni; ciò fornisce la possibilità di analizzare il significato da attribuire alla probabilità assegnata all'evento in questione:

E = "Ottenere almeno un doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi"

e l'evento complementare:

E^C = "Ottenere nessun doppio 6 lanciando 24 volte una coppia di dadi"

La probabilità dell'evento E^C è:

$$p(E^C) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}5086$$

Quindi, la probabilità contraria è:

$$p(E) = 1 - p(E^C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914.$$

DEFINIZIONE

Frequenza relativa

La frequenza relativa $f(E)$ di un evento sottoposto a n esperimenti, effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto fra il numero delle volte m che si è verificato e il numero n delle prove effettuate.

frequenza relativa di E

numero di prove che verificano E

$$f(E) = \frac{m}{n}$$

numero di prove effettuate

la probabilità di un fenomeno aleatorio, calcolato mediante la frequenza relativa, si avvicina sempre di più a quella calcolata secondo la definizione classica all'aumentare del numero di prove effettuate.

PROPRIETÀ

Legge empirica del caso

Dato un evento E, sottoposto a n prove tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza relativa $f(E) = \frac{m}{n}$ tende al valore della probabilità $p(E)$, all'aumentare del numero n di prove effettuate.

Nell'impostazione classica il valore della probabilità è calcolato **a priori**, ossia prima che l'esperimento avvenga, mentre il valore della frequenza è un valore **a posteriori**.

Ci sono moltissimi eventi per i quali è impossibile calcolare la probabilità applicando l'impostazione classica. Per eventi di questo tipo si è costretti ad applicare l'impostazione frequentistica.

Per esempio, nel campo delle assicurazioni si calcola con questo metodo:

- la probabilità di incidenti automobilistici;
- la probabilità di vita e di morte;
- la probabilità di furti;

ecc.

La probabilità empirica può essere applicata soltanto agli esperimenti ripetibili nelle stesse condizioni per un numero di volte relativamente elevato, sufficiente a stabilizzare la frequenza relativa. Ciò non sempre accade, come ad esempio nel risultato di una partita di calcio o nelle previsioni meteorologiche per il giorno successivo. In questi casi, la valutazione della probabilità di un certo evento deve essere fatta con un quadro di riferimento diverso da quello dell'idea della frequenza empirica, ciò può costituire argomento di approfondimento per il futuro.

Risulta da questi dati che chi non fuma ha una probabilità di ammalarsi uguale a $\frac{7}{100.000}$, mentre, anche fumando solo 10 sigarette al giorno, la probabilità diventa uguale a $\frac{70}{100.000}$, cioè 10 volte maggiore. La probabilità raggiunge il valore di $\frac{350}{100.000}$ per i fumatori di più di 40 sigarette al giorno.

Appare chiara la dipendenza fra tumore e fumo.

9. I due modi di valutare la probabilità di un evento

Abbiamo parlato di due modi per valutare la probabilità di un evento: probabilità classica e probabilità statistica. Sono state definite così:

probabilità classica: è data dal rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché i casi siano tutti ugualmente possibili;

probabilità statistica: è data dal rapporto fra il numero dei casi in cui l'evento si è verificato e il numero dei casi osservati, purché questo numero sia molto grande.

Vogliamo considerare ora una situazione in cui è possibile valutare la probabilità in tutti e due i modi: è il lancio della moneta, il gioco con cui abbiamo iniziato questo Argomento.

Abbiamo detto che la probabilità (classica) che esca per esempio «testa» è $\frac{1}{2}$, perché 1 è il caso favorevole e 2 sono i casi possibili (può uscire testa o croce).

Vediamo ora che cosa succede se si lancia effettivamente la moneta. Abbiamo già detto che se i lanci sono pochi, può anche accadere che si presenti sempre la stessa faccia, per esempio sempre «testa»; ma se il numero dei lanci è molto grande (per esempio 1000), il caso «si regolarizza», e il numero di volte in cui si presenta «testa» è molto vicino al numero di volte in cui si presenta «croce».

Questo esperimento conferma il fatto che la valutazione statistica della probabilità è attendibile solo se il numero dei casi esaminati è molto grande.

Ma quante volte si sente dire: «Non è vero che il fumo faccia male; mio nonno fumava 50 sigarette al giorno e stava benissimo fino a 90 anni!», oppure, «Non è vero che il caffè faccia aumentare la pressione; io prendo 6 o 7 tazzine al giorno e non ho nessun disturbo!»

Torniamo al lancio di una moneta. L'abbiamo messo in relazione con l'evento «nascere maschio o femmina». Anche in questo evento la probabilità che si verifichi un caso o l'altro è del 50% dato che i casi possibili sono 2, e 1 è il caso che c'interessa.

Ma, dal punto di vista statistico, le cose non stanno così: da statistiche eseguite in molti paesi da oltre un secolo e su numeri molto grandi di nati, è risultato un fatto sorprendente: è più probabile nascere maschio che femmina; si ha una probabilità del 51% che il nascituro sia maschio.

Questo fatto sembra contrastare con quanto avviene col passare degli anni; in effetti, oltre i 18 anni, il numero delle femmine supera quello dei maschi, e di questo squilibrio veniamo a conoscenza in periodo elettorale. Accade che, in età giovanile, l'uomo è più soggetto a morti accidentali.

Ma torniamo alle nascite; perché nascono più maschi che femmine ? Varie sono le interpretazioni scientifiche che si danno al fenomeno, ma non si è ancora trovata una spiegazione del tutto attendibile. Dobbiamo rinunciare a cercare una spiegazione scientifica e accettare un argomento proposto nel Settecento in favore della Divina Provvidenza ? In un'autorevole rivista inglese del 1710 si trova un articolo sull'argomento «nascite». L'autore dell'articolo esamina i registri delle nascite avvenute a Londra in un periodo di 82 anni e riscontra, appunto, un'eccedenza di maschi rispetto alle femmine. Attribuisce allora questa eccedenza a una doppia preoccupazione del Creatore: quella di compensare i rischi maggiori a cui vanno soggetti i maschi, e quella, anche, di evitare, in qualche modo, la poligamia!

Da "Pentole, ombre, formiche"
In viaggio con la matematica
di Emma Castelnuovo